球面最小二乗法による球面上の曲線あてはめ

藤木　淳† 赤穂昭太郎†

† 産業技術総合研究所　〒305–8568 茨城県つくば市梅園 1–1–1 つくば中央第 2
E-mail: †{jun-fujiki,s.akaho}@aist.go.jp

あらまし 高次元ベクトルデータの類似性は，ユークリッド距離よりもむしろ相関係数によって測られることが多い．このとき，高次元ベクトルデータは正規化することにより単位超球面上の点とみなすことができ，2 つのベクトルの相関係数は単位超球面上の測地線に沿う長さとなる．つまり高次元ベクトルデータを超球面データとみなす場合，測地線に沿う長さを基準として色々な推定が行われる必要がある．そこで本稿では単位超球面上の点列に超曲面をあてはめるための手始めとして，まずは二次元球面上のデータに対して測地線に沿う距離の二乗を最小化することによって一次元曲線あてはめる手法を提案する．そしてこの提案手法が計量のユークリッド化を利用した曲線のあてはめ問題と関係があることを特殊な場合について証明する．

キーワード 球面最小二乗法，曲線あてはめ，測地線，ユークリッド化

Curve fitting by Spherical Least Squares on two-dimensional sphere

Jun FUJIKI† and Shotaro AKAHO†

† National Institute of Advanced Industrial Science and Technology, Tsukuba-Central 2, 1–1–1 Umezono,
Tsukuba-shi, Ibaraki 305–8568 Japan
E-mail: †{jun-fujiki,s.akaho}@aist.go.jp

Abstract To measure the similarity between two high dimensional vector data, correlation coefficient is often used instead of Euclidean distance. For this purpose, the high dimensional vectors are mapped into hyperspherical points by normalization and the distance is measured as the length along geodesic on the hypersphere. Then estimations from high dimensional vector data should be resolved as minimizing appropriate energy function of the length along geodesic when high dimensional vector data are regarded as hyperspherical data. In this paper, for the first step of hyper surface fitting to hyperspehrical data, the method of curve fitting to two-dimensional spherical data by Spherical Least Squares is proposed. It is also shown that the proposed method is closely related to the curve fitting by Euclidenization of the metric is special case.

Key words Spherical Least Squares, curve fitting, geodesic, Euclideanization

1. はじめに

近年超球面上のデータ解析が重要な地位を占めつつある．

コンピュータビジョンにおいて反射屈折カメラや魚眼カメラなどの全方位カメラが広く用いられ，ロボットナビゲーションや監視システム等に利用されている．そして全方位カメラを統一的に理解するために球面カメラが定義されている [2], [4], [8], [11], [14], [17], [20], [21]．ここで球面カメラにおいて，3 次元空間の点や直線は 2 次元球面 S^2 上の点や大円に射影されるので，2 次元球面 S^2 上のデータ解析はコンピュータビジョンにおいて重要である．またコンピュータビジョンにおけるカメラ運動は，カメラの正面方向にのみ着目すると，その軌跡は球面上の点列と対応づけることができる [6], [7], [16], [18]（詳細は [18] 参照）．このときカメラ運動の平滑化は球面上の点列に小円や大円 [7], [16]，そしてそれらをつなげた連接小円 [18] をあてはめることによって実現できる．

金融工学では，2 つの超球面データの内積を並べてできる相関行列が投資モデルにおいて重要な役割りを果たす [3]．シミュレーションにおいて計算コストを削減するには相関行列の次元削減を行うことが重要であり [13]，これは単位超球面データに大超球面をあてはめることに相当する．そしてバイオインフォマティクスにおける遺伝子表現プロファイルやデータマイニングにおける文章解析においても，データのノルムを無視し，超球面上のデータと等価な方向データとみなすことが行なわれている [19]．以上の例からもわかるように超球面データ解析は近年重要な意味を持っている．

超球面データ解析における一つの主題は高次元データの次元圧縮である．その際，超球面の部分空間として大超球面や小超球面をあてはめるのが簡明である．というのは大超球面や小超球面は超球面とユークリッド空間との交わりとしてとらえられるからである．しかし，このような線型に近い構造のあてはめではなく，非線型な構造をあてはめることを考えるとき，超球面の部分空間として大超球面や小超球面以外の一般の超曲面をあてはめる必要が生じるだろう．

本稿では，そのあてはめ手法として球面上の点列に助変数で表現される曲線をあてはめることを考え，手始めに二次元球面上の点列に緯度経度を座標変数とする曲線をあてはめる問題に対する解法を提案する．この際，曲線とデータ点のずれを測地線に沿う距離によって測る，つまり**球面最小二乗基準（Spherical Least Squares；SLS）** により曲線をあてはめる．

また，球面を等方向射影によって平面に射影し，球面上の測地線に沿う距離に関する最小二乗法を平面上でのユークリッド距離に関する重みつき最小二乗法で近似するユークリッド化 [9], [10] が提案されているが，本稿では，航程線のあてはめ問題における提案手法と，メルカトル図法によって平面に射影場合のユークリッド化を用いた推定とが本質的に等価であることを示す．

2． 問 題 設 定

ノイズを含むデータに対して曲線をあてはめることはデータ解析において基本的かつ重要な過程である．そこで本稿では，二次元球面 S^2 上において，ノイズを含むデータに対して緯度と経度の関係式で表現された助変数を含む曲線をあてはめる手法を提案する．

2．1　球面最小二乗基準

観測されたノイズを含むと考えられるデータ点を $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^m$ とする．ここで $||\boldsymbol{x}^p|| = 1$（$p = 1, \ldots, m$）である．

球面上において $\boldsymbol{x}^p$ から曲線に下した垂線の足(注1)を $\widehat{\boldsymbol{x}}^p$ とするとき

$$r^p = \cos^{-1}\left\{\left(\widehat{\boldsymbol{x}}^p\right)^\top \boldsymbol{x}^p\right\} \tag{1}$$

として，

$$\sum_{p=1}^{m} (r^p)^2 \tag{2}$$

を最小とするような曲線（を記述する助変数）を求める．

2．2　球面の緯度経度

二次元球面 S^2 上の点は，緯度と経度で表現することができる．本稿では，緯度及び経度が非負の値となるように修正した**補緯度（colatitude）**と**補経度（colongitude）**(注2)を座標変数として二次元球面を表現する．

補緯度とは，北極が 0，南極が π となるように緯度を修正したもので，補緯度 ϕ（$0 \leqq \phi \leqq \pi$）と地球を表現する緯度 ϕ^{Earth}（北緯を +，南緯を − とする）との間には

$$\phi + \phi^{\mathrm{Earth}} = \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

という関係があり，補経度 ψ（$0 \leqq \psi < 2\pi$）と地球を表現する経度 ψ^{Earth} （西経を −，東経を + とする）との間には

$$\psi = \begin{cases} \psi^{\mathrm{Earth}} + 2\pi & (-\pi < \psi^{\mathrm{Earth}} < 0) \\ \psi^{\mathrm{Earth}} & (0 \leqq \psi^{\mathrm{Earth}} \leqq \pi) \end{cases} \tag{4}$$

という関係がある．

補緯度と補経度を用いると，二次元球面上の点の三次元座標は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\psi \\ \sin\phi\sin\psi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \tag{5}$$

と表現される．この三次元座標から補緯度，補経度を求めるには

$$\phi = \cos^{-1} z, \quad \psi = \arg(x + yi) \tag{6}$$

（i は虚数単位）とすれば良い（ここで極の補経度は 0 であるとする）．

2．3　微小距離〜弧と弦〜

補緯度と補経度の組を $\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$ とすると，それに対応する三次元座標は

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\psi \\ \sin\phi\sin\psi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる．今，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\phi})$ が微小変化して

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\phi}) + \delta\boldsymbol{x} \tag{8}$$

になったとする．このとき，$\delta\boldsymbol{x}$ は 2 点 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\phi})$ と $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\phi})$ を結ぶ弦の長さであり，幾何学的に，弦の長さと弧の長さ r との間には

$$\frac{||\delta\boldsymbol{x}||}{2} = \sin\frac{r}{2} \tag{9}$$

という関係が成立する．よって

$$r = 2\sin^{-1}\frac{||\delta\boldsymbol{x}||}{2} \tag{10}$$

が成立する．なお式 (10) を一次近似すると

$$r = ||\delta\boldsymbol{x}|| \tag{11}$$

となり，弦の長さと弧の長さの差は 2 次以上の微小量となることがわかる．つまり誤差が小さいと考えて良い場合，弧を弦で近似しても良いということになる．

(注1)：ある点から曲線に対して測地線に沿う距離が最小となるような測地線を**垂線**と呼び，測地線に沿う距離が最小となるような点を**垂線の足**と呼ぶ．

(注2)：緯度と補緯度は明確に区別されているが，経度と補経度は 2π を法として合同なため，特に区別しないことが多く，文献 [15]p.160 においても，補緯度のみしか定義されていない．

2.4 計　　量

二次元球面上の点の三次元座標は補緯度と補経度の組 $\boldsymbol{\phi}$ から三次元座標 $\boldsymbol{x}$ への写像と考えることができ，その写像を

$$\boldsymbol{x}: \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{12}$$

と表現すると，その**ヤコビ行列（Jacobian matrix）**$J_{\boldsymbol{x}}$ は

$$J_{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi & -\sin\phi\sin\psi \\ \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\phi & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

となり，計量テンソル $G_{\boldsymbol{x}}$ は

$$G_{\boldsymbol{x}} = J_{\boldsymbol{x}}^{\top} J_{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\phi \end{pmatrix} \tag{14}$$

となる．このとき，

$$\delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\phi}) = J_{\boldsymbol{x}}\delta\boldsymbol{\phi} \tag{15}$$

であるから，

$$\begin{aligned} ||\delta\boldsymbol{x}||^2 &= \delta\boldsymbol{\phi}^{\top} J_{\boldsymbol{x}}^{\top} J_{\boldsymbol{x}} \delta\boldsymbol{\phi} = \delta\boldsymbol{\phi}^{\top} G_{\boldsymbol{x}} \delta\boldsymbol{\phi} & (16) \\ &= \delta\phi^2 + \sin^2\phi\,\delta\psi^2 & (17) \end{aligned}$$

が成立する．これは微小変化を 1 次近似したものであるから，1 次近似の範囲内では，測地線に沿う誤差 r は

$$r^2 = \delta\phi^2 + \sin^2\phi\,\delta\psi^2 \tag{18}$$

と近似されることがわかる．

3. 緯度経度を変数とする曲線

緯度経度を変数とする曲線として主なものは**大圏航路（great circle cource）**と**航程線（rhumb line または loxodrome）**である．大圏航路は測地線に沿う距離であり，二次元球面 S^2 と原点を通る平面との交線としてとらえた方が簡単ではあるが，本稿では助変数を利用してとらえることにする．また，航程線は大航海時代に活躍した航行法であり，曲線と経線とのなす角度が常に一定となる曲線である．このとは**メルカトル図法（Mercator projection）** において航程線が直線で表現されることを意味する．

本節では，まずこれら 2 つの曲線について考察し，次に一般的な曲線について考察することとする．

3.1 大圏航路

大圏航路は大円であり，S^2 と原点を通る平面との交わりとしてとらえることができるので，大圏航路の助変数表示は，三次元空間における原点を通る平面の助変数表示 $ax + by + cz = 0$ を利用して

$$a\sin\phi\cos\psi + b\sin\phi\sin\psi + c\cos\phi = 0 \tag{19}$$

となる．

なお，2 点 (ϕ_1, ψ_1)，(ϕ_2, ψ_2)（$0 \leqq \psi_1 \leqq \psi_2 < 2\pi$）を通る大圏航路は

$$\cot\phi = \cot\phi_1 \frac{\sin(\psi_2 - \psi)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)} + \cot\phi_2 \frac{\sin(\psi_1 - \psi)}{\sin(\psi_1 - \psi_2)} \tag{20}$$

となる．

3.2 航程線

航程線はメルカトル図法

$$\alpha = \sinh^{-1}(\cot\phi)) = \log\left|\cot\frac{\phi}{2}\right|, \quad \beta = \psi \tag{21}$$

において直線をあらわすので，航程線の助変数表示は，直線の助変数表示 $a\alpha + b\beta + c = 0$ を利用して

$$a\sinh^{-1}(\cot\phi)) + b\psi + c = 0 \tag{22}$$

となる．

なお，2 点 (ϕ_1, ψ_1)，(ϕ_2, ψ_2)（$0 \leqq \psi_1 \leqq \psi_2 < 2\pi$）を通る航程線の方程式は，

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \psi_1 - \psi_2 \\ \sinh^{-1}(\cot\phi_2)) - \sinh^{-1}(\cot\phi_1)) \\ \psi_2\sinh^{-1}(\cot\phi_1) - \psi_1\sinh^{-1}(\cot\phi_2) \end{pmatrix} \tag{23}$$

として

$$\boldsymbol{n}^{\top} \begin{pmatrix} \sinh^{-1}(\cot\phi)) \\ \psi \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{24}$$

となる．

3.3 緯度経度を変数とする曲線

補緯度 ϕ，補経度 ψ を変数とし，助変数 $\boldsymbol{a}$ によって記述される曲線群を

$$f(\phi, \psi; \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{\top} F(\phi, \psi) = 0 \tag{25}$$

とする．

観測されたデータ点を $\begin{pmatrix} \phi^p \\ \psi^p \end{pmatrix}$ （$p = 1, \ldots, m$）とし，それらデータ点の真の値，つまり曲線 $f(\phi, \psi; \boldsymbol{a}) = 0$ へ下した垂線の足を $\begin{pmatrix} \widehat{\phi}^p \\ \widehat{\psi}^p \end{pmatrix}$ （$p = 1, \ldots, m$）とする．

このとき，

$$\begin{pmatrix} \widehat{\phi}^p \\ \widehat{\psi}^p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi^p \\ \psi^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\phi^p \\ \delta\psi^p \end{pmatrix} \tag{26}$$

とすると，

$$\begin{aligned} f(\widehat{\phi}^p, \widehat{\psi}^p; \boldsymbol{a}) \approx\ & f(\phi^p, \psi^p; \boldsymbol{a}) & (27) \\ & + \delta\phi^p \frac{\partial f}{\partial\phi}(\phi^p, \psi^p; \boldsymbol{a}) \\ & + \delta\psi^p \frac{\partial f}{\partial\psi}(\phi^p, \psi^p; \boldsymbol{a}) = 0 & (28) \end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\phi^p, \psi^p; \boldsymbol{a})}{\partial\phi} &= \boldsymbol{a}^{\top} \frac{\partial F}{\partial\phi}(\phi^p, \psi^p), & (29) \\ \frac{\partial f(\phi^p, \psi^p; \boldsymbol{a})}{\partial\psi} &= \boldsymbol{a}^{\top} \frac{\partial F}{\partial\psi}(\phi^p, \psi^p) & (30) \end{aligned}$$

により，

$$\begin{aligned} \partial\phi^p &= \frac{\partial F}{\partial\phi}(\phi^p, \psi^p), & (31) \\ \partial\psi^p &= \frac{\partial F}{\partial\psi}(\phi^p, \psi^p) & (32) \end{aligned}$$

とおくと，

$$\delta\phi^p(\boldsymbol{a}^\top\partial\phi^p)+(\sin\phi^p\delta\psi^p)\cdot\frac{1}{\sin\phi^p}(\boldsymbol{a}^\top\partial\psi^p) \tag{33}$$
$$=-\boldsymbol{a}^\top F(\widehat{\phi}^p,\widehat{\psi}^p) \tag{34}$$

だから，$(r^p)^2=(\delta\phi^p)^2+\sin^2\phi^p\,(\delta\psi^p)^2$ の最小値は

$$(r^p)^2=\frac{\boldsymbol{a}^\top\left[F(\widehat{\phi}^p,\widehat{\psi}^p)F(\widehat{\phi}^p,\widehat{\psi}^p)^\top\right]\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^\top\left[(\partial\phi^p)(\partial\phi^p)^\top+\dfrac{(\partial\psi^p)(\partial\psi^p)^\top}{\sin^2\phi^p}\right]\boldsymbol{a}} \tag{35}$$

である．ここで，

$$V_{\boldsymbol{x}^p}[\boldsymbol{\phi}^p]\;=\;(\partial\phi^p)(\partial\phi^p)^\top+\frac{(\partial\psi^p)(\partial\psi^p)^\top}{\sin^2\phi^p} \tag{36}$$

とおくと，

$$(r^p)^2=\frac{\boldsymbol{a}^\top\left[F(\widehat{\phi}^p,\widehat{\psi}^p)F(\widehat{\phi}^p,\widehat{\psi}^p)^\top\right]\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^\top V_{\boldsymbol{x}^p}[\boldsymbol{\phi}^p]\,\boldsymbol{a}} \tag{37}$$

となり，球面最小二乗法による曲線のあてはめ問題は

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{a})\;=\;\sum_{p=1}^{m}(r^p)^2 \tag{38}$$
$$=\sum_{p=1}^{m}\frac{\boldsymbol{a}^\top\left[F(\widehat{\phi}^p,\widehat{\psi}^p)F(\widehat{\phi}^p,\widehat{\psi}^p)^\top\right]\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^\top V_{\boldsymbol{x}^p}[\boldsymbol{\phi}^p]\,\boldsymbol{a}} \tag{39}$$

を最小にする $\boldsymbol{a}$ を求めれば良い．

3.4 一　般　化

n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の集合である k 次元曲面を記述する k 個の座標変数を並べてできるベクトルを $\boldsymbol{\phi}_{(k\times 1)}$ とし，l 個の助変数を並べてできるベクトル $\boldsymbol{a}_{(l\times 1)}$ によって記述される曲線群を

$$f(\boldsymbol{\phi};\boldsymbol{a})=\underset{(1\times l)}{\boldsymbol{a}^\top}\ \underset{(l\times 1)}{F(\boldsymbol{\phi})}=0 \tag{40}$$

とする．

観測されたデータ点を $\boldsymbol{\phi}^p$（$p=1,\ldots,m$）とし，それらデータ点の真の値，つまり曲線 $f(\boldsymbol{\phi};\boldsymbol{a})=0$ へ下した垂線の足を $\widehat{\boldsymbol{\phi}}^p$（$p=1,\ldots,m$）とする．

このとき，

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}^p-\boldsymbol{\phi}^p=\delta\boldsymbol{\phi}^p \tag{41}$$

とすると，

$$f(\widehat{\boldsymbol{\phi}}^p;\boldsymbol{a})\approx f(\boldsymbol{\phi};\boldsymbol{a})+\underset{(1\times k)}{\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}^p;\boldsymbol{a})}\ \delta\boldsymbol{\phi}^p=0 \tag{42}$$

が成立する．

$$\underset{(1\times k)}{\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\phi}}}(\boldsymbol{\phi}^p;\boldsymbol{a})\;=\;\underset{(1\times l)}{\boldsymbol{a}^\top}\underset{(l\times k)}{\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\phi}}}(\boldsymbol{\phi}) \tag{43}$$

により，写像 F に対するヤコビ行列を J_F を

$$J_F=\underset{(l\times k)}{J_F(\boldsymbol{\phi}^p)}\;=\;\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}^p) \tag{44}$$

とおくと，

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\phi}^p;\boldsymbol{a})\,\delta\boldsymbol{\phi}^p=\boldsymbol{a}^\top J_F(\boldsymbol{\phi}^p)\,\delta\boldsymbol{\phi}^p=-f(\widehat{\boldsymbol{\phi}}^p;\boldsymbol{a}) \tag{45}$$

が成立するので，写像

$$\boldsymbol{x}:\ \boldsymbol{\phi}\mapsto\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\phi}) \tag{46}$$

に対するヤコビ行列 $J_{\boldsymbol{x}}$，計量テンソル $G_{\boldsymbol{x}}$ を

$$J_{\boldsymbol{x}}\;=\;\underset{(n\times k)}{J_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\phi})}=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{\phi}}, \tag{47}$$
$$G_{\boldsymbol{x}}\;=\;\underset{(k\times k)}{G_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\phi})}=J_{\boldsymbol{x}}^\top J_{\boldsymbol{x}} \tag{48}$$

と定義すると，

$$(r^p)^2=||\delta\boldsymbol{x}^p||^2=\underset{(1\times k)}{\delta\boldsymbol{\phi}^{p\top}}\ \underset{(k\times k)}{G_{\boldsymbol{x}}}\ \underset{(k\times 1)}{\delta\boldsymbol{\phi}^p} \tag{49}$$

であるから，条件

$$\boldsymbol{a}^\top\left[J_F\,\delta\boldsymbol{\phi}^p\,\delta\boldsymbol{\phi}^{p\top}J_F^\top\right]\boldsymbol{a}=f(\widehat{\boldsymbol{\phi}}^p;\boldsymbol{a})^2 \tag{50}$$

における

$$(r^p)^2=\underset{(1\times k)}{\delta\boldsymbol{\phi}^{p\top}}\ \underset{(k\times k)}{G_{\boldsymbol{x}}}\ \underset{(k\times 1)}{\delta\boldsymbol{\phi}^p} \tag{51}$$

の最小値を求めれば良く，コーシー・シュワルツの不等式（**附録 A**）により

$$(r^p)^2\;=\;\frac{f(\widehat{\boldsymbol{\phi}}^p;\boldsymbol{a})^2}{\boldsymbol{a}^\top\left[J_F\,G_{\boldsymbol{x}}^{-1}\,J_F^\top\right]\boldsymbol{a}} \tag{52}$$
$$=\;\frac{\boldsymbol{a}^\top\left[(\widehat{F}^p)(\widehat{F}^p)^\top\right]\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^\top\left[J_F\,G_{\boldsymbol{x}}^{-1}\,J_F^\top\right]\boldsymbol{a}} \tag{53}$$

となる．ここで，

$$\widehat{F}^p=F(\widehat{\boldsymbol{\phi}}^p) \tag{54}$$

である．

さて，式 (53) において

$$\widehat{X}^p\;=\;(\widehat{F}^p)(\widehat{F}^p)^\top,\quad D^p=J_F\,G_{\boldsymbol{x}}^{-1}\,J_F^\top \tag{55}$$

とおくと，球面最小二乗法による曲線のあてはめ問題は

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{a})=\sum_{p=1}^{m}\frac{\boldsymbol{a}^\top\widehat{X}^p\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^\top D^p\boldsymbol{a}} \tag{56}$$

を最小にする $\boldsymbol{a}$ を求めることとなる．

4. 球面上の曲線のあてはめ問題の解法

本節では，Akaho [1] による式 (56) の最小化アルゴリズムを紹介する．ここで $f(\phi,\psi;\boldsymbol{a})$ は助変数 $\boldsymbol{a}$ に対して十分に滑らかであるとし，$\boldsymbol{a}$ が少し変化した場合の $\partial f/\partial\phi$，$\partial f/\partial\psi$ の変化は十分に小さいものとする．

さて，助変数 $\boldsymbol{a}$ の近似値 $\boldsymbol{a}_0$ が得られたとき，

$$\mu^p=\boldsymbol{a}_0^\top D^p\boldsymbol{a}_0 \tag{57}$$

とするとエネルギー関数 $\mathcal{E}(\boldsymbol{a})$ は

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{a}) \approx \widehat{\mathcal{E}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{p=1}^{m} \boldsymbol{a}^\top \left(\frac{1}{\mu^p} X^p\right) \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^\top \left(\sum_{p=1}^{m} \frac{1}{\mu^p} X^p\right) \boldsymbol{a} \tag{58}$$

と近似でき，これを最小にする $\boldsymbol{a}$ は行列

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{1}{\mu^p} X^p \tag{59}$$

の最小固有値に対応する固有ベクトルとなる．

4.1 アルゴリズム

(1) $\mu^p := 1$ for $p = 1, \ldots, m$

(2) (a)，(b) を繰り返す

(a) $\displaystyle\sum_{p=1}^{m} \frac{1}{\mu^p} X^p$ の最小固有値に対応する単位固有ベクトル $\widehat{\boldsymbol{a}}$ を求める．

(b) $\mu^p := \widehat{\boldsymbol{a}}^\top D^p \widehat{\boldsymbol{a}}$ for $p = 1, \ldots, m$

4.2 大圏航路のあてはめ

大圏航路の表現は

$$f(\phi, \psi; \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^\top \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\psi \\ \sin\phi\sin\psi \\ \cos\phi \end{pmatrix} = 0 \tag{60}$$

であるから，

$$J_F = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi & -\sin\phi\sin\psi \\ \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\phi & 0 \end{pmatrix} \tag{61}$$

となる．また

$$G_{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\phi \end{pmatrix} \tag{62}$$

より

$$G_{\boldsymbol{x}}^{-1} = \frac{1}{\sin^2\phi} \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{63}$$

となるので $\sin\phi = s_\phi$ などと書くと

$$X^p = \begin{pmatrix} s_\phi^2 c_\psi^2 & s_\phi^2 c_\psi s_\psi & s_\phi c_\psi c_\phi \\ s_\phi^2 c_\psi s_\psi & s_\phi^2 s_\psi^2 & s_\phi s_\psi c_\phi \\ s_\phi c_\psi c_\phi & c_\phi s_\phi s_\psi & c_\phi^2 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

$$D^p = \begin{pmatrix} c_\phi^2 c_\psi^2 + s_\phi^2 s_\psi^2 & -s_\phi^2 c_\psi s_\psi & -s_\phi c_\phi c_\psi \\ -s_\phi^2 c_\psi s_\psi & c_\phi^2 s_\psi^2 + s_\phi^2 c_\psi^2 & -s_\phi c_\phi s_\psi \\ -s_\phi c_\phi c_\psi & -s_\phi c_\phi s_\psi & s_\phi^2 \end{pmatrix} \tag{65}$$

が成立する．

4.3 航程線のあてはめ

航程線の表現は

$$f(\phi, \psi; \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^\top \begin{pmatrix} \sinh^{-1}(\cot\phi) \\ \psi \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{66}$$

であるから，

$$J_F = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sin\phi} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

となる．また

$$G_{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\phi \end{pmatrix} \tag{68}$$

より

$$G_{\boldsymbol{x}}^{-1} = \frac{1}{\sin^2\phi} \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

となるので，$s^p = \sinh^{-1}(\cot\phi^p))$ とおくと

$$X^p = \begin{pmatrix} (s^p)^2 & s^p\psi^p & s^p \\ s^p\psi^p & (\psi^p)^2 & \psi^p \\ s^p & \psi^p & 1 \end{pmatrix}, \tag{70}$$

$$D^p = \frac{1}{\sin^2\phi^p} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

が成立する．

5. 計量のユークリッド化

球面最小二乗法を近似するために超球面上の**計量のユークリッド化（Euclideanization of Metric）**が提案された [9], [10]．計量のユークリッド化とは，空間を変換する際に，もとの空間の計量をなるべく保存するために導入される計量の変換規則のことである．

計量のユークリッド化は藤木・赤穂 [9], [10] によって**等方向射影（equi-directional projection）**の場合に提案された．

k 次元ユークリッド空間の正規直交座標から k 次元空間への写像

$$\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\phi} \mapsto \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\phi}) \tag{72}$$

において，ヤコビ行列 $J_{\boldsymbol{\alpha}}$ の行列式である**ヤコビアン（Jacobian determinant）**の絶対値は

$$|\det(J_{\boldsymbol{\alpha}})| \quad \text{where} \quad J_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\phi}} \tag{73}$$

となる．このヤコビアンを用いると，k 次元体積要素は $|\det(J_{\boldsymbol{\alpha}})|$ 倍されるので，

k 次元超球面 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\phi})$ から k 次元空間への写像

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\phi}) \mapsto \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\phi}) \tag{74}$$

において，k 次元体積要素は

$$J = \frac{|\det(J_{\boldsymbol{\alpha}})|}{|\det(J_{\boldsymbol{x}})|} \quad \text{where} \quad J_{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{\phi}} \tag{75}$$

倍される．よって線分長は平均して $J^{\frac{1}{k}}$ 倍拡大されると期待できる．

そこで写像先の空間で，もとの空間の最小二乗法を近似的に表現するためには，写像先の空間において線分長に $J^{-\frac{1}{k}}$ の重みを加えた重みつき最小二乗法を適用すれば良いというのが

ユークリッド化の考え方である．

この考え方の下では，ユークリッド化は球面から超平面への等方向射影の場合だけでなく，より一般的な写像についても考えることができる．そこで，航程線が直線として表現されるメルカトル図法において計量のユークリッド化を考え，提案手法と比較する．

5.1　メルカトル図法のユークリッド化

球面をメルカトル図法に射影したとき，補緯度 ϕ，補経度 ψ 近辺の面積要素がどの程度拡大されるかを考えてみる．

写像 $\boldsymbol{\alpha}$ を

$$\boldsymbol{\alpha}: \begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sinh^{-1}(\cot\phi)\\ \psi\end{pmatrix} \tag{76}$$

とおくと，$\boldsymbol{\alpha}$ のヤコビ行列は

$$J\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sin\phi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{77}$$

であるから，$\boldsymbol{\alpha}$ のヤコビアンの絶対値は

$$|\det(J\boldsymbol{\alpha})| = \left|\det\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sin\phi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sin\phi} \tag{78}$$

となる．また，2 次元球面上での補緯度 ϕ，補経度 ψ における面積要素は

$$\sin\phi\, d\phi\, d\psi \tag{79}$$

であるから，

$$J\boldsymbol{x} = \sin\phi \tag{80}$$

が成立する．よって

$$J = \frac{1}{\sin^2\phi} \tag{81}$$

が成立し，補緯度 ϕ，補経度 ψ 近辺において線分は，その平方根である

$$\sqrt{J} = \frac{1}{|\sin\phi|} \tag{82}$$

倍拡大されることが期待できる．

よって，球面上における測地線に沿う誤差 r^p が小さいとき，$(r^p)^2$ はメルカトル図法上での誤差 $(\delta\alpha^p)^2 + (\delta\beta^p)^2$ に重みをつけた

$$\sin^2\phi^p\{(\delta\alpha^p)^2 + (\delta\beta^p)^2\} \tag{83}$$

で近似できるという考え方がユークリッド化であり，球面上で球面最小二乗基準による航程線のあてはめ問題は，ユークリッド化により，メルカトル図法上での重みつき最小二乗基準による直線あてはめ問題で近似をすることができる．

さて，このメルカトル図法上での重みつき最小二乗基準による直線あてはめ問題は

$$\alpha^p = \sinh^{-1}(\cot\phi^p), \quad \beta^p = \psi^p \tag{84}$$

と座標変換した後，直線

$$\boldsymbol{a}^\top\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{85}$$

をあてはめる問題となる．ここで座標変換されたデータ点と直線の距離は条件

$$\boldsymbol{a}^\top\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{86}$$

における

$$(r^p)^2 = \sin^2\phi^p\{(\delta\alpha^p)^2 + (\delta\beta^p)^2\} \tag{87}$$

の最小値であり，

$$(r^p)^2 = \frac{\boldsymbol{a}^\top[(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^p)(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^p)^\top]\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^\top\left[\dfrac{1}{\sin^2\phi^p}J_F J_F^\top\right]\boldsymbol{a}} \tag{88}$$

となる．ここで $F(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix}$ だから

$$J_F = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{89}$$

である．すると，

$$\mathcal{E}^{\mathrm{Euclid}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{p=1}^{m}\frac{\boldsymbol{a}^\top[(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^p)(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}^p)^\top]\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^\top\left[\dfrac{1}{\sin^2\phi^p}J_F J_F^\top\right]\boldsymbol{a}} \tag{90}$$

を最小化する $\boldsymbol{a}$ を求める問題に帰着されることがわかる．

ここで

$$\boldsymbol{\alpha}^p = \begin{pmatrix}\sinh^{-1}(\cot\phi^p)\\ \psi^p\\ 1\end{pmatrix}, \tag{91}$$

$$J_F J_F^\top = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{92}$$

であるから，$s^p = \sinh^{-1}(\cot\phi^p))$ とおくと

$$(\boldsymbol{\alpha}^p)(\boldsymbol{\alpha}^p)^\top = \begin{pmatrix}(s^p)^2 & s^p\psi^p & s^p\\ s^p\psi^p & (\psi^p)^2 & \psi^p\\ s^p & \psi^p & 1\end{pmatrix} = X^p, \tag{93}$$

$$\frac{1}{\sin^2\phi^p}J_F J_F^\top = D^p \tag{94}$$

となり，

$$\mathcal{E}^{\mathrm{Euclid}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{p=1}^{m}\frac{\boldsymbol{a}^\top\widehat{X}^p\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^\top D^p\boldsymbol{a}} \tag{95}$$

は式 (56) と等しくなる．つまり，航程線のあてはめにおいて，球面最小二乗法による曲線のあてはめが，球面をメルカトル図法に射影したときのユークリッド化により実現できていることがわかる．

6. おわりに

本稿では，二次元球面上の点列に緯度経度を座標変数にもつ曲線をあてはめる手法を提案した．また，航程線のあてはめにおいて，提案手法がメルカトル図法におけるユークリッド化と一致することを証明した．今後は他の曲線のあてはめ問題とユークリッド化の関係，多次元球面上のあてはめへの拡張などを探って行きたい．

文　献

[1] S. Akaho, "Curve fitting that minimizes the mean square of perpendicular distances from sample points," In Proc. of SPIE93, Vision Geometry II, Vol.2060, (1993).

[2] S. Baker and S. K. Nayar, "A theory of catadioptric image formation," In Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV98), pp.35–42, Jan. 1998.

[3] A. Brace, D. Gątarek, M. Musiela, "The market model of interest rate dynamics," Mathematical Finance, Vol.7, No.2, pp.127-155, (1997).

[4] K. Daniilidis, A. Makadia and T. Bulow, "Image processing in catadioptric planes: spatiotemporal derivatives and optical flow computation," *OMNIVIS02*, pp.3-10, 2002.

[5] N. I. Fisher, T. Lewis and B. J. J. Embleton, "Statistical anaylsis of spherical data," Cambridge Univ. Press, 1987.

[6] J. Fujiki, S. Akaho and N. Murata, "Nonlinear PCA/ICA for the structure from motion problem," In Proc. of ICA04(LNCS 3195), pp. 750-757, Granada, Sep. 2004.

[7] J. Fujiki and S. Akaho, "Small ciecle fitting to the sequence of spherical points -Towards smoothing of camera motions-," Technical Report of IEICE, PRMU2004-149, pp.91-96, 2004 , (In Japanese).

[8] J. Fujiki and S. Akaho, "Epipolar geometry for spherical camera and its calculations," Technical Report of IEICE, PRMU2005-41, pp.41-46, 2005 , (In Japanese).

[9] J. Fujiki and S. Akaho, "Small hypersphere fitting by Spherical Least Square," In Proc. of ICONIP05, pp.439-444, 2005.

[10] J. Fujiki and S. Akaho, "Spherical PCA with Euclideanization," In Proc. of Workshop on ACCV'07, Subspace 2007.

[11] C. Geyer and K. Daniilidis, "Catadioptric Projective Geometry," IJCV, vol.45, no.3, pp.223-243, Dec. 2001.

[12] N. H. Gray, P. A. Geiser and J. R. Geiser, "On the least-squares fit of small and great circles to spherically projected orientation data," Mathematical Geology, vol.12, no.3, pp.173–184, 1980.

[13] I. Grubišić and R. Pietersz, "Efficient rank reduction of correlation matrices," Utrecht Univ., preprint, 2005.

[14] A. Makadia and K. Daniilidis, "Direct 3D-rotation estimation from spherical images via a generalized shift theorem," In proc. of CVPR03, pp.II: 217-224, 2003.

[15] K. V. Mardia and P. E. Jupp, "Directional Statistics," John Wiley & Sons Ltd., 2000.

[16] J. Mimura, N. Murata and J. Fujiki, "Smoothing of camera motions via small circle fitting for the sequence of spherical points," Technical Report of IEICE, PRMU, 2005, (In Japanese).

[17] K. Miyamoto, "Fish eye lens," Journal of Optical Society of America, vol.54, no.8, pp.1060-1061, Aug. 1964.

[18] 野田容士, 藤木淳, 村田 昇, "球面上の点列に対する連接小円回帰を用いたカメラ運動の平滑化," 信学論 D-II, vol.J91-D, no.5, pp.1336-1348, 2008

[19] S. Oba and S. Ishii, "Kernel density estimation on hypersphere," 2004 Workshop on Information-Based Induction Sciences(IBIS2004), pp.197-202, (2004), (In Japanese).

[20] T. Svoboda and T. Pajdla, "Epipolar Geometry for Central Catadioptric Cameras," IJCV, vol.49, no.1, pp.23-37, 2002.

[21] A. Torii and A. Imiya, "Analysis of Central Camera Systems for Computer Vision," CVIM 154-30, 2006.

附録 A. コーシー・シュワルツの不等式

n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y}) \geqq (\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y})^2$$

（等号は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が平行なとき）が成立する．これを**コーシー・シュワルツの不等式（Cauchy-Schwarz's inequality）**と呼ぶ．

証明は任意の λ に対して

$$(\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{y}) \geqq 0$$

だから，λ について判別式をとれば良い．

今，正値対称行列 G があるとする．そして $G = LL^\top$ とコレスキー分解されるものとする．このとき，

$$\boldsymbol{z} = L^\top\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{w} = L^{-\top}\boldsymbol{y}$$

とおくと $\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{w}$ に対するコーシー・シュワルツの不等式から

$$(\boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{z})(\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{w}) \geqq (\boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{w})^2$$

であるから，

$$(\boldsymbol{x}^\top G\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}^\top G^{-1}\boldsymbol{y}) \geqq (\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y})^2$$

が成立する．

よって

$$\boldsymbol{x}^\top G\boldsymbol{x} \geqq \frac{(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{y})^2}{\boldsymbol{y}^\top G^{-1}\boldsymbol{y}}$$

が成立する．